Mathematik für Informatiker
Übung 10

Aufgabe 1.

$$(\mathbb{N}/\{0\};|)$$

$$| \ isteinepartielleOrdnungsrelationaufdenpositivennatürlichenZahlenda$$
$$(\forall a,b,c \in \mathbb{N}(a \mid a,(a \mid banb \mid c) \Rightarrow a \mid c, a \mid b \land b \mid a) \Rightarrow a = b)erfülltist.$$

$$DasSupremumcvonaundberfülltdiebeidenBedingungen:$$
$$1. a \mid c, b \mid c,$$
$$2. \forall c' \in \mathbb{N}((a \mid c' \land b \mid c') \Rightarrow c \mid c')$$
$$DasInfinumvonaundberfülltdiebeidenBedingungen:$$
$$1. c \mid a, c \mid b,$$
$$2. \forall c' \in \mathbb{N}((c' \mid a \land c' \mid b) \Rightarrow c' \mid c).$$

$$DerggT(a,b)entsprichtdemInfinumvona, b \in \mathbb{N}/\{0\}unddaskgV(a,b)demSupremum$$
$$vonaundb \in \mathbb{N}/\{0\}.(\mathbb{N}/\{0\};|)istdahereinVerband.$$

$$Da(\mathbb{N}/\{0\};|)einepartiellgeordneteMenge, abernichtlineargeordnetistunddaheralso$$
$$auchkeingrößtesElementbesitzt, kanneskeineBoolscheAlgebrasein.$$

Aufgabe 2.

Hasse-Diagramm der Boolschen Algebra$(P(\{0,a,b,1\});\cap,\cup,\neg,\emptyset,\{0,a,b,1\})$:

Aufgabe 3.

$$(B;+,*) ist ein kommutativer Ring, da (B;+) eine kommutative Gruppe,$$
$$(B;*) eine Halbgruppe ist und die Distributivgesetze gelten.$$

$$Distributivgesetze:$$
$$\forall x, y, z(x * (y + z) = x * y + x * z, (x + y) * z = x * z + y * z)$$

$$(x * (y + z) = x * y + x * z)$$
$$x \land ((y \land (\neg z)) \lor ((\neg y) \land z)) = (x \land (y \land \neg z)) \lor (x \land (\neg y \land z)) = (x \land y \land \neg z) \lor (x \land \neg y \land z)$$

x	y	z	$x \land ((y \land (\neg z)) \lor ((\neg y) \land z))$	$(x \land y \land \neg z) \lor (x \land \neg y \land z)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

Aus der Strukturtafel für (B; +) erkennt man die Kommutativität(Spiegelung an der Hauptdiagonalen). (B; +) ist assoziativ, weil $\forall x, y, z(x + (y + z) = (x + y) + z)$erfüllt ist und umkehrbar, da $\forall x, y \in B \exists u, v \in B(x + u = v + x = y)$erfüllt ist.
Daher ist (B; +) eine kommutative Gruppe.

Strukturtafel zu (B; +): $(x \land (\neg y)) \lor ((\neg x) \land y)$

+	1	0
1	0	1
0	1	0

Assoziativität:

x	y	z	$x + (y + z)$	$(x + y) + z$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

(B;*) ist eine Halbgruppe, weil sie die oben genannten Bedingungen bis auf die Umkehrbarkeit erfüllt.

Strukturtafel zu (B; *): $(x \land y)$

*	1	0
1	1	0
0	0	0