Mathematik-Klausur Zusammenfassung

Konvertieren von Zahlen anderer Positionssysteme.

z.B.: $(2121)_{10} \rightarrow (x)_5$

$2121 = 424 * 5 + 1$
$424 = 84 * 5 + 4$
$84 = 16 * 5 + 4$
$16 = 3 * 5 + 1$
$3 = 0 * 5 + 3$

$(2121)_{10} = (31441)_5$

Grundziffer g ist gesucht:

$49 = (121)_g$
$49 = 1g^2 + 2g + 1 \qquad | -49$
$0 = g^2 + 2g - 48$
$g_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+48}$
$\underline{\underline{g_1 = 6}} \quad g_2 = -8 \Rightarrow \textit{Widerspruch!}$

ggT bestimmten (euklidischer Algorithmus):

$a = q_1 * r_0 + r_1$	$1071 = 1 * 1029 + 42$
$r_0 = q_2 * r_1 + r_2$	$1029 = 24 * 42 + 21$
$r_1 = q_3 * r_2 + r_3$	$42 = 2 * 21 + 0$
.	
.	$ggT(1071, 1029) = 21$
$r_{n-1} = q_{n+1} * r_n + 0$	
$ggT(a, b) = r_n$	

Umrechnen von Dezimalbruch $\Leftrightarrow$ Bruch:

$x = 0{,}2\bar{5} \qquad x = 0{,}2 + 0{,}0\bar{5} \qquad y = 0.0\bar{5} \qquad 100y = \frac{55}{10} + y \quad d.h \quad 99y = \frac{55}{10} \qquad y = \frac{55}{990}$

$\textit{daraus ergibt sich } x = \frac{1}{5} + \frac{55}{990} = \frac{198}{990} + \frac{55}{990} = \frac{153}{990}$

Logik:

$((A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)) \Rightarrow (\neg A) \sim ((a \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow A))$

Überprüfung durch Wahrheitswerte Tabelle

Mengenlehre:

$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
$\subseteq$
$(A \cap B) \setminus C = \{x | x \in (A \cap B) \wedge x \notin C\}$
$(A \cap B) \setminus C = \{x | (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C\}$
$(A \cap B) \setminus C = \{x | x \in A \wedge x \notin C\} \cap \{x | x \in B \wedge x \notin C\}$
$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
$\supseteq$ *.... ähnlich*

$P(M) := \{A | A \subseteq M\}$
$z.B: P(\{a, b\}) = \{\{a, b\}, \{a\}, \{b\} \emptyset\}$
$|P(M)| = 2^n \textit{ für } |M| = n$

Relationen:

reflexiv: $\forall x \in M((x, x) \in R)$
symmetrisch: $\forall x, y \in M((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$
tranistiv: $\forall x, y, z \in M((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R)$

antisymetrisch:
***Beispiel*:**
$M = \{1,2,3\} \qquad \rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$
Äquivalenzklassen: $[1]_\rho = \{1,2\} = [2]_\rho, [3]_\rho = \{3\}$
Faktormenge: $M_{/\rho} = \{[1]_\rho [3]_\rho\} = \{\{1,2\}, \{3\}\}$
K ist eine Zerlegung von M wenn:
• $\emptyset \notin K$ • *jedes Element aus* $M \in K$ *vorkommt* • *Mengen von K disjunkt sind*

Relation R heisst partielle Ordnungsrelation $\in M$ *wenn R*:
• *reflexiv* • *antisymmetrisch* • *transitiv*

Supremum falls:
$\forall b \in B(b \leq a) \wedge \forall a' \in A, b \in B(b \leq a' \Rightarrow a \leq a')$
d.h. a ist Supremum von B, falls a kleinste obere Schranke ist

Infinum falls: $\forall b \in B(b \geq a) \wedge \forall a' \in A, b \in B(b \geq a' \Rightarrow a \geq a')$
d.h. a ist Infinum von B falls a größte untere Schranke ist.
$f \subseteq M_1 x M_2$
$\forall x \in M_1 \exists y \in M_2 (x, y) \in f \rightarrow$ *d.h. jedes x besitzt ein* $y \in f$
$\forall x \in M_1 \forall y_1, y_2 \in M_2 (((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f) \Rightarrow y_1 = y_2)$ *d.h. f ist eindeutig*

Bild von f: $Image(f) = Wb(f)\, y$
Original von f: $Preim(f) = Db(f)\, x$

injektiv *(eineindeutig)*
$\forall y \in M_2 \exists! x \in M_1 (x, y) \in f$ *d.h. jedes y besitzt höchstens ein x*
besser: $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$
surjektiv *(f bildet auf M2 ab)*
$\forall y \in M_2 \exists x \in M_1 (x, y)$ *ind f d.h. jedes y besitzt mindestens ein x*
besser: $\forall y. \exists x. f(x) = y$
bijektiv *(falls injektiv und surjektiv)*
$\forall y \in M_2 \exists!! x \in M_1 (x, y) \in f$ *d.h. jedes y besitzt genau ein x*

Gleichheit
$f = g$ *wenn* $Db(f) = Db(g) \wedge f(x) = g(x)$ *für alle* $x \in Db(f)$
Inklusion
$f \subseteq g$ *wenn* $Db(f) \subseteq Db(g) \wedge f(x) = g(x)$ *für alle* $x \in Db(f)$
Verkettung *(Multiplikation* $\circ$*)*
$f: M \rightarrow N$ *und* $g: N \rightarrow P, g \circ f: M \rightarrow P, (g \circ f)(x) := g(f(x))$

Kombinatorik:

Permutation $= n!$
Variation o.W. $= n(n-1)...(n-(k-1)) = k!\binom{n}{k}$ — *Variation ist mit Berücksichtigung der Reihenfolge*
Variation m.W. $= n^k$
Kombination o.W. $= \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — *Kombination ist ohne Berücksichtigung der Reihenfolge*
Kombination m.W. $= \binom{n+k-1}{k}$

Algebraische Strukturen

Kommutativgesetz: $\forall a, b (a + b = b + a)$ *durch Spiegellung an Strukturtafeldiagonale erkennbar*
Assoziativgesetz: $\forall abc (a + (b + c) = (a + b) + c)$
Nullelement einer (Halb) gruppe $(A; +) 0 \in A: \forall a \in A (a + 0 = 0 + a = a)$
Einselement einer (Halb) gruppe: $(A; *) \forall a \in A (a * e = e * a = a)$
Kürzungsregeln:
$\forall a, x, y (a + x = a + y \Rightarrow x = y \wedge x + a = y + a \Rightarrow x = y)$
$\forall a, x, y (a * x = a * y \Rightarrow x = y \wedge x * a = y * a \Rightarrow x = y)$

Halbgruppe $H = (M; +)$	*Abgeschlossheit bzgl. M und ist assoziativ und* $M = \emptyset$
Monoid $N = (M; +; 0)$	*oder* $N = (M; +; e) +$ *neutrales Element*
Gruppe $G = (M; +)$	*wie Halbgruppe + umkehrbar d.h.* $\forall a \in M \exists a \in M (a + a = e)$
	d.h es $\exists$ *ein Null − und Einselement*
	Erkennbar durch: jede Zeile und Spalte enthält jedes $e \in M$ *genau einmal vor.*
Ring $R = (M; +; \circ)$	$(M; +)$ *kommutative Gruppe (an Diagonale spiegelbar)*
	$(M; \circ)$ *Halbgruppe + Distributivgesetze gelten*
Körper $K = (M; +; \circ)$	$(M; +; \circ)$ *kommutativer Ring*
	$(M \setminus 0; \circ)$ *kommutative Gruppe*

Permutationsgruppen
S_n *ist Menge aller Permutationen der Ordnung n.* $(Sn; \circ)$ *ist eine Gruppe.* $|Sn| = n!$
$(13)(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (12)(34) \circ (13)(24) = (14)(23)$ *Immer rechts anfangen!!!*
Nullteiler: *Ringelement* $a \neq 0$ *für das* $ab = 0$ *gilt, mit* $b \neq 0$

***Boolesche Algebren und Verbände*:**
Verbände sind partielle Ordnungsrealtionen auf einer Menge

Verband $V = (V; \wedge, \vee)$	*kommutativ d.h.* $x \vee y = y \vee x$
	assoziativ d.h. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
	idempotent d.h. $x \vee x = x$
	absorbtiv d.h. $x \vee (x \wedge y) = x$
distributiver Verband	*+ distributiv d.h.* $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
Boolesche Algebra	*+ Existenz der Komplemente* $x \wedge \neg x = 0$ *und* $x \vee \neg x = 1$
$B = (B; \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$	

***Graphen*:**
$grdv := |e \in E \vee v \in e|$ *d.h. Anzahl der Kanten e an einer Ecke v*
G heisst r − regulär, wenn gilt $\forall v \in V (grdv = r)$ *d.h. jede Kante v aus V beträgt den Grad r*
$\sum_{v \in E} grdv = 2|E|$ *d.h. die Summe aller Grade aller Ecken ist zweimal die Kantenanzahl (Handschlaglemma)*
Kantenzug $(v_0, ..., v_n)$ *wenn* $v_i, v_{i+1} \in E$, *wenn* $v_0 = v_n$ *dann geschlossener Kantenzug, sonst off ener.*
G ist zusammenhängend, wenn es für zwei beliebige Ecken einen Kantenzug gibt.

Wenn Kantenzug offen und jede Kante höchstens einmal vorkommt, dann ***Weg.***
Wenn Kantenzug geschlossen und jede Kante höchstens einmal vorkommt, dann ***Kreis.***
Eulerscher *Weg ist ein Weg, der jede Kante aus G genau einmal enthält.*
Eulerscher *Kreis ist ein Kreis, der jede Kante aus G genau einmal enthält.*
Hamiltonscher *Weg ist ein Weg, der jede Ecke aus G genau einmal enthält*
Hamiltonscher *Kreis ist ein Kreis, der jede Ecke aus G genau einmal enthält*

G ist genau dann eulerisch, wenn G einen eulerischen Kreis enthält oder $\forall v \in V \exists n \in N (grdv = 2n)$
G ist genau dann hamiltonisch, wenn G einen hamiltonschen Kreis enthält.

***Baume, Wälder*:**
Ein Wald ist ein kreisfreier Graph.
Ein Baum ist zusammenhängender kreisfreier Graph.
1. $G = (V, E)$ *ist ein Baum mit n Ecken,*
2. *je zwei Ecken von G sind durch genau einen Weg verbunden,*
3. *G ist zusammenhängend, aber für jede Kante e ist* $G = (V, E \setminus e)$ *es nicht,*
4. *G ist zusammenhängend und besitzt genau* $n - 1$ *Kanten,*
5. *G ist kreisfrei und besitzt genau* $n - 1$ *Kanten,*
6. *G ist kreisfrei, aber für zwei nicht benachbarte Ecken v und w enthält* $G = (V, \exists \cup v, w)$ *genau einen Kreis.*

***Beweisideen*:**
$1. \Rightarrow 2.$: *Da G zusammenhängend gibt es mind. einen Weg zwischen zwei Ecken. Gäbe es mehr als einen Weg, gäbe es Kreise* $\Rightarrow$ *genau ein Weg*
$2. \Rightarrow 3.$: *Sei* $e = v, w$ *Kante* $\in G$. *aus 2. folgt e ist einziger Weg zwischen v und w. Daher kann* $G = (V, E \setminus e)$ *nicht zusammenhängend sein.*
$3. \Rightarrow 4.$: *G besitzt eine Zusammenhangskomponente. Schrittweises Entfernen von* $e \in E$ *erhöht jeweils um eins.*
$4. \Rightarrow 5.$: *Angenommen G enthalte Kreis K: K besitzt nach Def. k Ecken und k Kanten. Alle restlichen* $n - k$ *Ecken mit K verbinden. Braucht* $n - k$ *Kanten, deshalb hätte G* $k + (n - k) = n$ *Kanten. Widerspruch zu 4. Jeder endliche Baum besitzt mindestens eine Ecke vom Grad* ≤ 1 *(sog. Blätter) Ein Wald mit n Ecken und k Zusammenhangskomponenten besitzt genau* $n - k$ *Kanten.*

***Eulersche Polyederformel*:** *Für zusammenhängenden planaren Graphen*
$n + f = m + 2 \qquad n = |Ecken|; m = |Kanten|; f = |Flächen|$

Diophantische gleichungen

Diopahntische Gleichungen $a, b, c \in \mathbb{Z}$
$ax + by = c$
Notwendig für Lösbarkeit von gleichung ist: $ggT(a, b) | c$
$ggT(a, b) = 1$
Satz: ist (x_0, y_0) *Lsg. von gleichung, dann ist die Lösungsmenge von Gleichung*
$L = \{(x_0 + kb, y_0 - ka) | k \in set\ Z\}$

$Bsp: 27x+42y=23 \rightarrow ggT(27,42)=3 \quad 3|23 \rightarrow$ *nicht lösbar!*

1. *variante*

$27x+42y=21 \rightarrow ggT(27,42)=3 \quad 3|21 \rightarrow lösbar$

$9x+14y=7$

eulklidischer Algorythmus

$14=1*9+5$

$9=1*5+4$

$5=1*4+1$

$1=5-4$

$=5-(9-5)=2*5-9$

$=2(14-9)-9=2*14-3*9$

$9*(-3)+14*2=1 \quad |*7$

$(x_0 \text{ entspricht}) 9*(-21)+(y_0 \text{ entspricht}) 14+14=7$

$L=\{(-21+14k, 14-9k) | k \in \mathbb{Z}\}$

2.variante

$14y \equiv 7(9) \rightarrow 5y \equiv 7(9)$ *durch ausprobieren:*

y	5y	5y- 7
1	5	-2
2	10	3
3	15	8
4	20	13
5	25	18

$9x+14*5=7$

$9x \quad =-63$

$x=-7$

spezielle Lösung $:(-7,5)$

Beispiel kleiner Fermat: *Zeige, dass* $1753^{100}-1$ *durch* 33 *teilbar ist!*

Beweis: Die Beh. ist äquivalent zu $1753^{100} \equiv 1(33)$

$33=3*11 \quad ggT(1753,33)=1$

$\varphi(33)=33(1-\frac{1}{3})*(1-\frac{1}{11})=20$

Kl. Fermat

$1753^{20} \equiv 1(33)$

$(1753^{20})^5 \equiv 1^5(33) \Rightarrow 1753^{100} \equiv 1(33)$

linerare Kongruenzen:

$ax \equiv b(m)$

$ax \equiv b(m) \Leftrightarrow \exists g \in \mathbb{Z}: ax-b=g*m$

$ax-m*g=b$

Notwendig für Lösbarkeit von $ax \equiv b(m)$ *ist, dass* $ggT(a,m)$ *auch b teilt.*

Ist $d=ggT(a,m)=d$ *und* $|b$, *dann ist* $a=b*a', b=d*b', m=d*m' \Rightarrow a'x \equiv b'(m')$

$ax \equiv b(m)$ *mit* $ggT(a,m)=1$

$[ax]_m=[b]_m \Leftarrow [a]_m(prim)*[x]_m=[b]_m$ *es exestiert* $[a]^{-1_m}$ *und damit* $[x]_m=[a]^{-1_m}*[b]_m$

also ist es auch hinreichend!

Variante 1 inverse Restklasse:

$21x \equiv 48(72) \quad ggT(21,72)=3$ *und* $3|48$

$7x \equiv 16(24)$ *inverses zur* $7=7$ *daher...*

$x \equiv 7*16(24)$

$x \equiv 112(24)$

$L=[112]_{24}=[16]_{24}$

$=[16]_{72} \cup [40]_{72} \cup [56]_{72}$

$7x \equiv 16(24) \qquad 7x+24y=16$

Korrespondierende Kongruenz:

$24y \equiv 16(7)$

$3y \equiv 2(27)$

$y=3$ *ist Lösung*

y ursprüngliche Kongruenz einsetzen

$7x+72=16 \quad 7x=-56 \quad x=-8$

$L=[-8]_{24}$

mit Hilfe euklidischer Algorythmus:

$24=3*7+3$

$7=2*3+1$

$1=7-2*3=7-2(24-3*7)$

$1=7*7-2*24 \quad |*16$

$16=7*7*16-2*16*24$

$16=7*(7*16)-32*24$

$7*(7*16) \equiv 16(24)$

$L=[7*16]_{24}$

Varaiante 2 kleiner Fermat:

$\varphi(24)=8$

$7^8 \equiv 1(24)$

$7^8*16 \equiv 16(24)$

$7*(7^7*16) \equiv 16(24)$

$L=[7^7*16]_{24}=[7^7*16]_{72} \cup [7^7*16+24]_{72} \cup [7^7+48]_{72}$

$M=\{a,b,c\}$ <u>Bestimme P(M) abgeschlossen bezüglich</u> $\cap, \cup$

Ist $(P(M); \cap, \cup)$

$P(M)=\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\} \{b,c\}, M\}$

∩	Ø	{a}	{b}	{c}	{ab}	{ac}	{bc}	M
Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø
{a}	Ø	{a}	Ø	Ø	{a}	{a}	Ø	{a}
{b}	Ø	Ø	{b}	Ø	{b}	Ø	{b}	{b}
{c}	Ø	Ø	Ø	{c}	Ø	{c}	{c}	{c}
{ab}	Ø	{a}	{b}	Ø	{ab}	{a}	{b}	{ab}
{ac}	Ø	{a}	Ø	{c}	{b}	{ac}	{c}	{ac}
{bc}	Ø	Ø	{b}	{c}	{b}	{c}	{bc}	{bc}
M	Ø	{a}	{b}	{c}	{ab}	{ac}	{bc}	M

$P(M)$ *ist abgeschlossen für* $\cap$

$A \subseteq M, B \subseteq M, A \cap B \subseteq M$

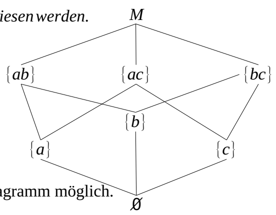
$(P(M); \cap, \cup) \cap, \cup$ *sind Operationen auf* $P(M)$

$\cap, \cup$ *assoziativ, kommutativ, idempotent* $A \cup A=A$

$A \cap A=A$

Absorptionsgesetzte $A \cap (A \cup B)=A \cup (A \cap B)=A$

Bei Beweisen der Mengenlehre kann auch aufs Buch verwiesen werden.



$(P(M); \subseteq) \quad \subseteq$ *ist partielle Ordnungsrelation*

$infimum(B,C)=B \cap C, B, C \subseteq M$

$supremum(B,C)=B \cup C$

Nachweis der Verbandseigenschaften auch durch Hassediagramm möglich.

Bäume Wälder

Beweise!: Ein Baum besitzt mindestens 2 Knoten vom Grad 1

Handschlaglemma n − Anzahl der Knoten, m − Anzahl der Kanten

$\sum_{v \in E} grd(v)=2*m$

Jeder Baum mit n Ecken besitzt $n-1$ *Kanten:*

$\sum_{v \in E} grd(v)=2*(n-1)$

Hätten alle Knoten Grade ≥ 2, $\Rightarrow$:

$\sum_{v \in E} grd(v) \geq 2*n$

$(2n-2) \rightarrow$ *Widerspruch!*

Da Graph zusammenhängend ist, müssen mindestens 2 Knoten Grad 1 haben.

Welche Strukturen bildet die folgende Menge der Restklassen modulo m? $(m=14)$

$K=\{[1]_{14}, [3]_{14}, [5]_{14}, [9]_{14}, [11]_{14}, [13]_{14}\} \rightarrow$ *nicht abgeschlossen bezüglich Addition*

$(P(M); *)$ *ist eine Gruppe, wegen den Primen Restklassen was schon bewiesen wurde.*

− Strukturtafel: Multiplikation bleibt innerhalb der Menge

Assoziativtät muss geprüft werden (zeigen durch?)

jede Spalte/Zeile jedes Element vorhanden → umkehrbar

daraus folgt! $\Rightarrow$ *Gruppe (wenn nicht umkehrbar Halbgruppe)*

Wie lautet die letzte Ziffer von 3^{999} ?

$3^{999} \equiv x(10) \qquad 3^{999}=a_n*10^n+a_n-1*10^n-1+.....+a_1*10+x \equiv 0(10)+x$

$3^1 \equiv 3(10), 3^2 \equiv 9(10), 3^3 \equiv 7(10), 3^4 \equiv 1(10), (3^4)^g \equiv 1^g(10)$

$3^{4g} \equiv 1(10) \qquad 3^{4g}*3 \equiv 1*3(10) \Rightarrow 3^{4g+1} \equiv 3(10)$

$3^{4g+2} \equiv 9(10) \qquad 3^{4g+2} \equiv 7(10) \qquad (3^4)^g \equiv 1^g(10)$

$999=4g+3 \qquad 3^{4g+2} \equiv 9(10)$

$3^{4g+3} \equiv 7(10)$

$(g=249) \qquad 3^{999} \equiv 7(10)$

Auf welche Ziffer endet die Dezimaldarstellung von $2^{2^n}+1$ *für beliebige* $n>1$?

$2^{2^n}+1 \equiv x(10) \quad n=2 \rightarrow 2^{2^2}=16$

$n=3 \rightarrow 2^{2^3}+1=257 \equiv 7(10)$

<u>*Vermutung für alle* $n>1$ *gilt* $2^{2^n}+1 \equiv 7(10)$</u>

durch vollständige Induktion: $2^{2^n}+1 \equiv 7(10) \Rightarrow 2^{2^n+1}+1 \equiv 7(10)$

$2^{2^n} \equiv 6(10) \Rightarrow 2^{2^n+1} \equiv 6(10)$

$2^{2^{n+1}}=2^{2^n*2}=(2^n)^2 \qquad (2^{2^n})^2 \equiv 6(10) \qquad (da\ 6*6 \equiv 36 \equiv 6(10))$

Lineare Kongruenz:

$17x \equiv 14(18)\ ggT(17,18)=1 \qquad 1(14) \rightarrow lösbar$

spezielle Lösung: $x_0=4$, *denn* $17*4=68 \equiv 14(18)$,

$x \equiv 14(18)$ *ist Lösungsmenge*

$6x \equiv 8(10)\ ggT(6,10)=2 \qquad 2|8 \rightarrow lösbar$

spezielle Lösung: $x_0=3$, *denn* $6*3=18 \equiv 3(5)$

$x \equiv 3(5)$ *ist Lösungsmenge*

$3x=2(11) \qquad ggT(3,11)=1 \qquad 1|2 \rightarrow lösbar$

spezielle Lösung: $x_0=8$ *da*, $3*8=24 \equiv 2(11)$

$x \equiv 2(11)$ *ist Lösungsmenge*

Beweisen sie mit Hilfe der Kongruenzrechnung, dass eine ganze Zahl genau dann durch 3 teilbar ist, wenn die Summe aller ihrer Ziffern in der Dezimaldarstellung durch 3 teilbar ist.

Sei $a_m, a_{m-1}, ...a_0, a_i \in 0,1,...,9$ *eine Dezimaldarstellung der Zahl* $\sum_{i=0}^{m} a_i 10^i$.

Ihre Quersumme ist $\sum_{i=0}^{m} a_i(3)$.

Aus $10 \equiv 1(3) \Rightarrow 10^i \equiv 1(3)$ *daher gilt* $a \equiv \sum_{i=0}^{m} a_i 10^i \equiv \sum_{i=0}^{m} a_i(3)$

Also ist a genau dann durch 3 teilbar $(a \equiv 0(3))$, *wenn die Quersumme von a durch 3 teilbar ist.*

Bsp.:

$12396=1*10^4+2*10^3+3*10^2+9*10+6$

$\equiv 1*(1)^4+2*(1)^3+3*(1)^2+9*(1)+6$

$\equiv 1+2+3+9+6\ mod\ 3 \equiv 0(3)$

$\Rightarrow 3|12396$