Aufgabe 1.

Ein Baum ist ein zusammenhängender Graph mit n – Ecken. Hierin sind zwei Ecken genau durch einen Weg verbunden. Wären sie durch mehr als einem Weg verbunden, so ergäbe dieses einen Kreis, dieses steht aber im Widerspruch zur Definition eines Baumes.
Existiert zwischen zwei Punkten überhaupt kein Weg, so handelt es sich um die Ecken verschiedener Zusammenhangskomponenten.
Hat man zunächst eine Zusammenhangskomponente, aus der man eine beliebige Kante entfernt, so entstehen zwei Zusammenhangskomponenten, da nun zwischen den Punkten, deren Kante entfernt wurde kein Weg existiert, würde denoch ein Weg existieren wäre die Zusammenhangskomponente kein Baum gewesen, da nicht Kreisfrei.
Wenn man also aus einem zusammenhängenden Graphen (Kreisfrei!), eines Baumes eine Kante entfernt, so erhält man die Zahl der Zusammenhangskomonenten von 1. Hat man alle Kanten entfernt, erhält man n- Zusammenhangskomponente. Somit enthält ein Baum immer eine Ecke mehr als er Kanten beinhaltet. Konstruiert man aus n- Ecken einen Baum, so benötigt man n -1 Kanten. Obiges Verfahren ist hierbei rückwärts anzuwenden.

Aufgabe 2.

Man beweise, dass ein Graph G genau dann ein Baum ist, wenn es für je zwei Ecken u,v, $u \neq v$ aus G genau einen Weg mit Anfangspunkt u und Endpunkt v gibt.

Beweis durch Kontraposition:

Wir nehmen an, wenn es mehrere Wege zwischen je zwei Ecken u und v gibt, dass genau dann ein Graph kein Baum ist.

„⇒“ Annahme: Es gibt mehrere Wege zwischen je zwei Ecken u,v ,
dann gibt es auch einen oder mehrere Kreise und dann kann nach Definition eines Baumes der Graph kein Baum sein.

„⇐“ Annahme: ein Graph ist kein Baum
dann kann es in diesem Graph auch Kreise geben. Wenn es einen Kreis gibt, gibt es zwischen je zwei Ecken u,v auch immer mehr als einen Weg.

Da die Hin-und Rückrichtung der Äquivalenz wahr sind ist auch die gesamte Kontraposition der Äquivalenz wahr, daraus folgt das auch die ursprüngliche Aussage wahr ist.

3 $((\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2)) \vee (x_1 \wedge x_2)$