1.

In dem Punkt $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ durchstößt die Gerade die Ebene.

2.

a.) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, da rg(B)=3 =Elemente der Basis ist B linear unabhängig.

b.) $< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > = 0; < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} > = 0; < \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} > = 0$, da Skalarprodukt 0 ist B orthogonal

c.) $\sqrt{< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >} = \sqrt{3}; \sqrt{< \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >} = \sqrt{2}; \sqrt{< \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} >} = \sqrt{6};$
, da nicht 1 ist B nicht orthonormiert.

3.

$$ker\varphi = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 | \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | \begin{pmatrix} x - y \\ y - x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ y - x &= 0 \\ \underline{x} &\underline{= 0} \\ x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow ker\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} also dim ker\varphi = 0$$

$$Durch den Dimensionssatz dim f(V) = dim V - ker\varphi folgt 2 = 2 - 0,$$
$$also muss die Basis von f(\mathbb{R}^2) aus 2 Elementen bestehen.$$

$$Also wäre \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} eine Basis von f(\mathbb{R}^2)$$
$$und dann stimmt der Dimensionssatz (für diesen Fall ;)).$$